גבולות חד צדדיים

נניח שf מוגדרת עבור . נגיד ש אם לכל קיים כך שאם אזי

אם f מוגדרת עבור נגיד ש אם לכל קיים כך שאם אזי

## דוגמה

:

# משפט

אם ורק אם

## הוכחה

=> : תרגיל

נניחש ש ו ויהי . אזי קיים כך שעבור מתקיים וגם קיים כך שעבור מתקיים . קח . אזי אם מתקיים וגם אם מתקיים . ז"א אם אזי ז"א

# משפט

אם ו() אזי קיימת סביבה של בה מתקיים ()

## הוכחה

קח ע"פ ההנחה קיים כך שעבור מתקיים   
כלומר עבור מתקיים . לכן:  
הוכחנו שאם אזי

# משפט

נניח שהגבולות , קיימים אזי גם קיימים הגבולות הבאים ומתקיימים:

1. אם ,

## הוכחה של ג)

כיוון ש לכל סדרה כך ש מוגדרת לכל n ו מתקיים . באופן דומה לכל סדרה כך ש מוגדרת לכל n ו מתקיים .  
כיוון ש קיים כך שעבור מתקיים [למה?]  
עכשיו תהי סדרה כך ש לכל n ו מוגדרות לכל n ו. \_ רות לכל ה קיימים הגבולות הבאים ומתקיימים:

# משפט

אם אזי לכל ,

## הוכחה

תרגיל

# הגדרה

אם מוגדרת עבור נגיד שf חסומה על(ב) A אם קיים M כך ש לכל . במילים אחרות f חסומה על A אם ורק אם הקבוצה חסומה.

אם f חסומה ב נגדיר

– התנודה של f על S

# משפט

אם אזי קיים כך שf חסומה ב

## הוכחה

קח . אזי קיים כך שאם אזי . עבור x כזה מתקיים

# הסימנים *o וO*

תהיינה f,g פונ' המוגדרות בסביבת (נקודה סופית או או ).

אם קיים כך שעבור מתקיים , נכתוב

אם נכתבו

## דוגמאות

x

O

C

A

*מ עבור אפשר להסיק:*

*ולכן כלומר*

## הוכחה

### טענה

עבור מתקיים

שטח המשולש = . מהו השטח של הגיזרה ? . מכיוון שהמשולש מכיל את הגיזרה נקבל . לכן:

כאשר מתקיים , , לכן לפי משפט הסנדוויץ:

# למה

אם ו אזי

## הוכחה

תרגיל

פונקציות רציפות

# הגדרה

תהי f פונקציה המקבלת ערכים ב המוגדרת בסביבת (סביבה שלמה). נגיד שf רציפה ב אם

ז"א שלכל קיים כך שאם אזי

אזי f רציפה ב אם לכל סדרה כך ש מוגדרת עבור כל n מתקיים

# הגדרות

f רציפה ל מהימין אם . f רציפה ל משמאל אם

# דוגמאות

: אינה רציפה ב0 מימין ואינה רציפה ב0 משמאל.

*: רציפה ב0 מימין אבל לא משמאל.*

*: רציפה ב0 משמאל אבל לא מימין.*

# משפט

f רציפה ב אם ורק אם היא רציפה מהימין ב ורציפה מהשמאל ב

## הוכחה

נניח ש,

אזי קיים כך שאם אזי   
גם קיים כך שאם אזי

קח . אזי אם ז"א אם מתקיים  
 ז"א